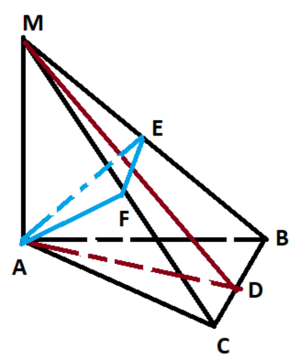
OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ, 7.02.2026–
Clasa a VIII-a

SUBIECTUL 1 (22,5p)
Se consideră triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC = 15$ cm și $BC = 18$ cm. În punctul A se ridică perpendiculara AM pe planul triunghiului ABC, cu $AM = 12$ cm. Semidreptele AE și AF sunt bisectoarele unghiurilor MAB și MAC, cu $E \in MB$ și $F \in MC$.
9,5p a) Calculați lungimile segmentelor MB și MD, unde D este mijlocul segmentului BC.
7p b) Arătați că $EF \parallel (ABC)$
6p c) Calculați distanța de la punctul F la planul (ABC).

Soluție:
a)



Triunghiurile MAB și MAD sunt dreptunghice **3p**

$MB = 3\sqrt{41}$cm **2,5p**

AD= 12cm **2p**

$MD = 12\sqrt{2}$ cm **2p**

b) În triunghiurile MAB și MAC aplicăm teorema bisectoarei și obținem $\frac{MA}{AB} = \frac{ME}{EB}$ și respectiv $\frac{MA}{AC} = \frac{MF}{FC}$. Cum $AB = AC$, se obține $\frac{ME}{EB} = \frac{MF}{FC}$ **3p**

Se obține din reciproca teoremei lui Thales $EF \parallel BC$ **2p**

$EF \parallel BC, BC \subset (ABC), EF \not\subset (ABC) \Rightarrow EF \parallel (ABC)$ **2p**

c) Fie FN$\perp AC, N \in AC,\ MA \perp AC \Rightarrow FN \parallel MA, MA \perp (ABC) \Rightarrow FN \perp (ABC) \Rightarrow$ $d\big(F,(ABC)\big) = FN$ **3p**

$\frac{MF}{FC} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{CF}{MC} = \frac{5}{9}; \Delta CFN \sim \Delta CMA \Rightarrow \frac{CF}{CM} = \frac{FN}{MA} = \frac{CN}{CA}$

$\frac{FN}{MA} = \frac{5}{9} \Rightarrow FN = \frac{20}{3}$cm **3p**

SUBIECTUL 2 (22,5p)

11,5p a) Demonstrați că $\frac{\sqrt{x(x+1)}}{2x+1} \leq \frac{1}{2}$, pentru orice $x \in (0,\infty)$.

11p b) Comparați numărul real $a = \frac{\sqrt{1\cdot 2}}{3} + \frac{\sqrt{2\cdot 3}}{5} + \frac{\sqrt{3\cdot 4}}{7} + \cdots + \frac{\sqrt{2026\cdot 2027}}{4053}$ și numărul real $b = \sqrt{1+3+5+\cdots+2025}$.

Soluție:

a)Dacă $x \in (0,\infty)$, avem $\frac{\sqrt{x(x+1)}}{2x+1} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{x(x+1)} \leq 2x+1 \Leftrightarrow$ **3,5p**

$4x(x+1) \leq (2x+1)^2$ **4p**

$\Leftrightarrow 4x^2 + 4x \leq 4x^2 + 4x + 1$-adevărat **4p**

b) Cum $\frac{\sqrt{x(x+1)}}{2x+1} \leq \frac{1}{2}$oricare $x \in (0,\infty)$, avem

$\frac{\sqrt{1\cdot 2}}{3} \leq \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2\cdot 3}}{5} \leq \frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3\cdot 4}}{7} \leq \frac{1}{2}$ și $\frac{\sqrt{2026\cdot 2027}}{4053} \leq \frac{1}{2}$, deci **4p**

$a \leq \frac{2026}{2}$, deci $a \leq 1013$. **4p**

$b = \sqrt{1+3+5+\cdots+2025}$=1013 **3p**

Așadar $a \leq b$.

SUBIECTUL 3 (22,5p)

Determinați numerele $\overline{abc}$ cu proprietatea că $\frac{10\cdot\overline{ab}}{c} - \frac{\overline{bc}}{a} = 99$ și stabiliți câte sunt.

GAZETA MATEMATICĂ

Soluție:

$\frac{10\cdot\overline{ab}}{c} - \frac{\overline{bc}}{a} = 99 \Leftrightarrow \frac{10(10a+b)}{c} - \frac{10b+c}{a} = 99$ **4,5p**

$100a^2 - 99ac - c^2 + 10ab - 10bc = 0$ **4p**

$(100a+c)(a-c) + 10b(a-c) = 0$ **4p**

$\overline{abc} \cdot (a-c) = 0$ **3p**

Dar $\overline{abc} \neq 0 \Rightarrow a - c = 0 \Rightarrow c = a \Rightarrow \overline{abc} = \overline{aba}, a, b \neq 0$ **3p**

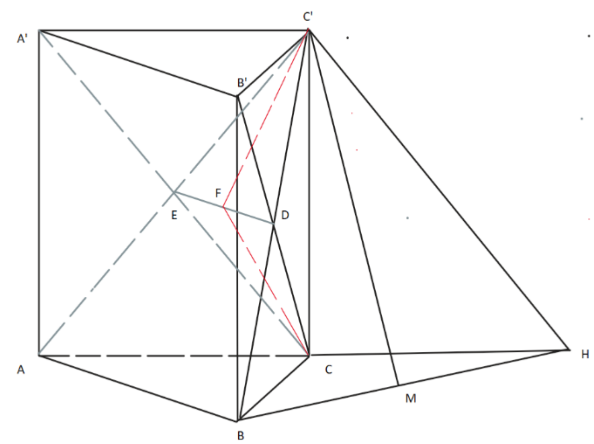
$a, b \in \{1,2,3,\dots,9\} \Rightarrow$ sunt 81 de numere naturale de trei cifre care verifică relația din enunțul problemei. **4p**

SUBIECTUL 4 (22,5p)

Se consideră prisma triunghiulară regulate $ABCA'B'C'$ cu baza triunghiul echilateral ABC, AB=$8\sqrt{6}cm$ și $AA' = 12\sqrt{2}cm$.

12,5p a) Demonstrați că planele (ABC') și $(A'B'C)$ sunt perpendicular.

10p b) Calculați sinusul unghiului dintre dreptele $A'C$ și BC'.



Soluție:

a)Notăm *D* și *E* intersecția dreptelor *BC'* și *B'C*, respectiv *AC'* și *CA'*.

Intersecția planelor (ABC') și $(A'B'C)$ este dreapta *DE* **4,5p**

F este mijlocul segmentului *DE;* $C'F \perp DE$ **3p**

$\Delta C'FC$ dreptunghic isoscel ($C'F = CF = 12cm$) **3p**

Deci *;* $C'F \perp (CDE)$, $C'F \subset (DEC)$, deci planele sunt perpendicular. **2p**

b)Notăm *H* simetricul lui *A* față de *C*; $A'C'HC$ paralelogram **2p**

Unghiul dintre dreptele $A'C$ și BC' devine unghiul $BC'H$ **3p**

ΔABH dreptunghic (reciproca teoremei medianei) **2p**

Calculul ariei triunghiului $BC'H$ **2p**

$\sin \widehat{BC'H} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$ **1p**

Notă:

Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.