OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 7.02.2026–

Clasa a VII-a

SUBIECTUL 1 (22,5p)

Se consideră numerele $a = \sqrt{1 + 3 + 5 + \cdots + 4051}$ și
$b = \sqrt{1} + \sqrt{1+3} + \sqrt{1+3+5} + \cdots + \sqrt{1+3+5+\cdots+4051}$.

11p a) Arătați că $a - 1$ este pătrat perfect.

11,5p b) Verificați dacă b este pătrat perfect.

Soluție:

a) **4p**

Suma $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 4051 = (1 + 4051) \cdot 2026 : 2 = 2026^2$ **4p**

$a = \sqrt{2026^2} = 2026$ **3p**

$a - 1 = 2025 = 45^2$ care este pătrat perfect

b)

$b = \sqrt{1} + \sqrt{2^2} + \sqrt{3^2} + \cdots + \sqrt{2026^2}$ **4p**

$= 1 + 2 + 3 + \ldots + 2026 = \dfrac{2026 \cdot 2027}{2}$ **4p**

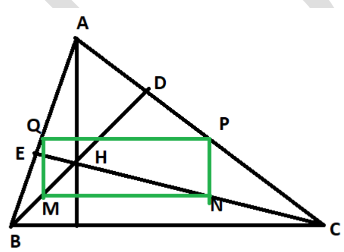
$= 1013 \cdot 2027$, care nu este pătrat perfect, numerele 1013 și 2027 fiind prime. **3,5p**

SUBIECTUL 2 (22,5p)

În triunghiul ascuțitunghic ABC, BD și CE sunt înălțimi, $D \in AC, E \in AB$, iar $BD \cap CE = \{H\}$. Punctele M, N, P, Q sunt mijloacele segmentelor BH, CH, AC, respectiv AB.

11p a) Să se arate că $MN \parallel PQ$.

11,5p b) Să se arate că $MNPQ$ este dreptunghi.



a) În triunghiul BHC, M este mijlocul lui BH, N mijlocul lui CH $\Rightarrow MN \parallel BC, MN = \frac{BC}{2}$ (1) **4p**

În triunghiul ABC, Q este mijlocul lui AB și P este mijlocul lui AC$\Rightarrow QP \parallel BC, QP = \frac{BC}{2}$ (2) **4p**

$MN \parallel BC, QP \parallel BC \Rightarrow MN \parallel QP$ **3p**

b) $MN \parallel QP\, , MN = PQ = \frac{BC}{2} \Rightarrow MNPQ$ paralelogram **3,5p**

În triunghiul ABH, Q este mijlocul lui AB, M este mijlocul lui BH$\Rightarrow QM \parallel AH$ **2p**

H este ortocentrul triunghiului ABC$\Rightarrow AH \perp BC$ **2p**

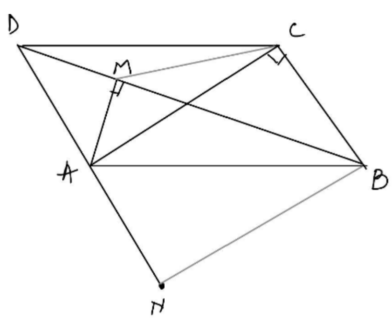
$QM \parallel AH, AH \perp BC \;\Rightarrow QM \perp BC, MN \parallel BC \Rightarrow QM \perp MN \Rightarrow \sphericalangle QMN = 90^0$ **2p**

$MNPQ$ paralelogram și $\sphericalangle QMN = 90^0 \Rightarrow MNPQ$ dreptunghi **2p**

SUBIECTUL 3 (22,5p)

Fie paralelogramul *ABCD* cu $AC \perp BC$. Considerăm proiecția *M* a punctului *A* pe *BD* și simetricul *N* al lui *D* față de *A*. Arătați că punctele *A*, *M*, *C*, *B*, *N* sunt conciclice.

Soluție:



$\widehat{AMB} \equiv \widehat{ACB}$ *deci* $ABCM$ este patrulater inscriptibil, deci M aparține cercului circumscris triunghiului ABC; **6,5p**

ABCD paralelogram implică $AD \parallel BC, AD = BC$, deci $AN \parallel BC, AN = BC$ și ANBC paralelogram; **6p**

cum $\widehat{ACB} = 90°$, avem că ANBC dreptunghi, deci ANBC inscriptibil și N aparține **5p**

cercului circumscris triunghiului ABC; **3p**

prin urmare punctele *A*, *M*, *C*, *B*, *N* sunt conciclice. **2p**

SUBIECTUL 4 (22,5p)

Se consideră $a_n = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \cdots + \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}, n \in \mathbb{N}^*$.

10,5p a) Determinați a_{399}.

6p b) Determinați $[\sqrt{2026} \cdot a_{2025}]$, unde $[b]$ înseamnă partea întregă a numărului *b*.

6p c) Determinați cardinalul mulțimii $A=\{n\in\mathbb{N}^*|a_n\in\mathbb{Q}, n\le 2025\}$

Soluție:

$a)a_n=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{1\cdot 2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2\cdot 3}}+\cdots+\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}=$ **2,5p**

$a_n=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}+\cdots+\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}}-\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}}$ **3p**

$a_n=1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}, n\in\mathbb{N}^*.$ **3p**

$a_{399}=1-\frac{1}{20}\Rightarrow a_{399}=\frac{19}{20}$ **2p**

$b)\sqrt{2026}\cdot a_{2025}=\sqrt{2026}-1$ **3p**

Rezultă $\left[\sqrt{2026}\cdot a_{2025}\right]=44$ **3p**

$c)a_n=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}, n\in\mathbb{N}^*, a_n\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow\sqrt{n+1}\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow n+1$ **3p**
este pătrat perfect $\Leftrightarrow n+1=k^2,\ k\in\mathbb{N}^*\Leftrightarrow n=k^2-1, n\in\mathbb{N}^*$ $și$ $n\le 2025$

$1\le k^2-1\le 2025, k\in\mathbb{N}^*\Leftrightarrow k\in\{2,3,\ldots,45\}\Rightarrow cardA=44$ **3p**

Notă:

Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.