OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 7.02.2026–

Clasa a V-a

SUBIECTUL 1 (22,5p)

11,5p a) Demonstrați că numărul natural

$a = 2026^{2025} + 2025^{2026} + 2024^{2027} + 2023^{2028} + 2022^{2029}$ **nu** este pătrat perfect.

11p b) Demonstrați că numărul $b = (1 + 3 + 5 + \cdots + 2027)^n$ este pătrat perfect pentru orice număr natural *n.*

Soluție:

a)Calculăm ultima cifră a numărului:

$\text{U}(2026^{2025}) = 6; \text{U}(2025^{2026}) = 5$ **3,5p**

$\text{U}(2024^{2027}) = 4; \text{U}(2023^{2028}) = 1$ **4p**

$\text{U}(2022^{2029}) = 2$ **2p**

U(*a*)=U(6+5+4+1+2)=8, deci numărul nu poate fi pătrat perfect **2p**

b) 1+3+5+…+2027=2028$\cdot$ 1014: 2= **4p**

$= 1014^2$ **4p**

$b = (1014^2)^n = (1014^n)^2$, deci este pătrat perfect. **3p**

SUBIECTUL 2 (22,5p)

Un număr natural nenul n se numește *”frumușel”*dacă împărțit la 46 dă restul de 3 ori mai mare decât câtul.

11,5p a) Determinați numerele *”frumușele”* de două cifre.

11p b) Determinați numerele *”frumușele”* care sunt pătrate perfecte.

Soluție:

a) $n = 46a + 3a \Rightarrow n = 49a, cu\ 3a < 46 \Rightarrow 1 \leq a \leq 15$ **5,5p**

Numărul n are două cifre dacă $49a \leq 99 \Rightarrow n = 49,98$ **6p**

b) Numărul 49 este pătrat perfect, deci *n* este pătrat perfect dacă și numai dacă *a* este pătrat perfect. **5p**

Sunt 3 pătrate perfecte nenule mai mici decât 15. Acestea sunt 1,4 și 9, de unde rezultă că sunt 3 numere naturale *”frumușele”* pătrate perfecte. Acestea sunt 49,196 și 441. **6p**

SUBIECTUL 3 (22,5p)

Un număr natural de trei cifre împărțit la răsturnatul său dă câtul 3 și restul 175. Diferența dintre cifra sutelor și cifra unităților numărului dat este 7. Determinați numărul.

GAZETA MATEMATICĂ

Soluție:

$\overline{abc}:\overline{cba} = 3$ rest 175, $175 < \overline{cba}$ **3,5p**

$\overline{abc} = 3 \cdot \overline{cba} + 175$, $175 < \overline{cba}$ de unde avem **4p**

$100a + 10b + c = 3(100c + 10b + a) + 175$ și

$100a + 10b + c = 300c + 30b + 3a + 175$ **4p**

$97a = 299c + 20b + 175;$ **3p**

Cum $a = c + 7$, relația devine: **2p**

$97(c + 7) = 299c + 20b + 175$ și deci

$504 = 202c + 20b \ de\ unde\ U(202c) = 4$ **4p**

Așadar $c = 2, b = 5 \ și \ a = 9$

$\overline{abc} = 952$ **2p**

SUBIECTUL 4 (22,5p)

Aflați numerele naturale de forma $\overline{abc}$ și numerele naturale *x* și *y* știind că:

$$4 \cdot \left(\overline{abc} + 3^{x+2}\right) = 2025 - 2^y$$

Soluție:

$4 \cdot \left(\overline{abc} + 3^{x+2}\right)$ este număr natural par, de unde rezultă că $2025 - 2^y$ este par, deci 2^y este impar $\Rightarrow y = 0$ **5,5p**

Se obține $\overline{abc} + 3^{x+2} = 506$. Dar $3^6 = 729 > 506 \Rightarrow x = 0,1,2,3$ **5p**

Pentru $x = 0 \Rightarrow \overline{abc} = 497$ **4p**

Pentru $x = 1 \Rightarrow \overline{abc} = 479$ **4p**

Pentru $x = 2 \Rightarrow \overline{abc} = 425$ **4p**

Pentru $x = 2 \Rightarrow \overline{abc} = 263$ **4p**

Notă:

Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.